令和４年度入試（令和３年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜（前期日程）
学部学科等	理学部・工学部・都市デザイン学部
教科・科目名	数学／ 数学（理・工・都市）
	（解答例） 別紙に略解を示す。
備　　考	

理学部・工学部・都市デザイン学部

$\boxed{1}$ (1) m,n を自然数とする。

n が奇数のとき, $2m+n$ は 3 以上の奇数, $n+1$ は 2 以上の偶数となる。$132=2^2\times3\times11$ より, $(2m+n,n+1)$ の候補は $(3,2^2\times11),(11,2^2\times3),(3\times11,2^2)$ である。

(i) $(2m+n,n+1)=(3,2^2\times11)$ のとき, $(m,n)=(-20,43)$ となり, この場合は (m,n) は自然数の組でない。

(ii) $(2m+n,n+1)=(11,2^2\times3)$ のとき, $(m,n)=(0,11)$ となり, この場合は (m,n) は自然数の組でない。

(iii) $(2m+n,n+1)=(3\times11,2^2)$ のとき, $(m,n)=(15,3)$ となり, この場合は (m,n) は自然数の組である。

n が偶数のとき, $2m+n$ は 4 以上の偶数, $n+1$ は 3 以上の奇数となる。$132=2^2\times3\times11$ より, $(2m+n,n+1)$ の候補は $(2^2,3\times11),(2^2\times3,11),(2^2\times11,3)$ である。

(i) $(2m+n,n+1)=(2^2,3\times11)$ のとき, $(m,n)=(-14,32)$ となり, この場合は (m,n) は自然数の組でない。

(ii) $(2m+n,n+1)=(2^2\times3,11)$ のとき, $(m,n)=(1,10)$ となり, この場合は (m,n) は自然数の組である。

(iii) $(2m+n,n+1)=(2^2\times11,3)$ のとき, $(m,n)=(21,2)$ となり, この場合は (m,n) は自然数の組である。

以上より, 求める自然数の組は $(15,3),(1,10),(21,2)$ である。

(2) 不等式

$$\left(\log_2 ab\right)^2-3\log_2 a^2b^2\geqq-5$$

において $x=\log_2 ab$ とおくと,

$$x^2-6x+5\geqq0$$

を得る。これより, $x\leqq1$ または $x\geqq5$ となる。従って, $\log_2 ab\leqq1$ または $\log_2 ab\geqq5$ である。これより, $ab\leqq2$ または $ab\geqq32$ である。これを満たす (a,b) の組は $(1,1),(1,2),(2,1),(6,6)$ の 4 つである。従って, 求める確率は

$$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

となり, $\dfrac{1}{9}$ である。

(3) まず,

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}&=\frac{2\left\{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\sqrt[3]{3}+1\right\}}{\left(\sqrt[3]{3}-1\right)\left\{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\sqrt[3]{3}+1\right\}}\\&=\frac{2\left\{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\sqrt[3]{3}+1\right\}}{3-1}=\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+\sqrt[3]{3}+1\end{aligned}$$

に注意する。従って,

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt[3]{3}+\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}}&=\sqrt{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2+2\sqrt[3]{3}+1}\\&=\sqrt{\left(\sqrt[3]{3}+1\right)^2}=\sqrt[3]{3}+1\end{aligned}$$

である。ここで,

$$1=\sqrt[3]{1}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[3]{8}=2$$

より,

$$2<\sqrt[3]{3}+1<3$$

である。以上より,

$$\left[\sqrt{\sqrt[3]{3}+\frac{2}{\sqrt[3]{3}-1}}\right]=2$$

となる。

理学部・工学部・都市デザイン学部

$\boxed{2}$ (1)

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_0^{\pi}(1+x)\sin x\,dx = \int_0^{\pi}(1+x)(-\cos x)'\,dx \\ &= \Big[(1+x)(-\cos x)\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx \\ &= \pi + 2\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^2 x\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+x)(1-\cos 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+x)\,dx - \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+x)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'dx \\ &= \frac{\pi}{8}(\pi+2) - \frac{1}{4}\left\{\left[(1+x)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx\right\} \\ &= \frac{\pi}{8}(\pi+2)\end{aligned}$$

である。

(2) $n \geqq 3$ として，

$$\begin{aligned}I_n &= \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^{n-1}x\,(-\cos x)'\,dx \\ &= \frac{1}{n}\Big[(1+x)\sin^{n-1}x\,(-\cos x)\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\left\{(1+x)\sin^{n-1}x\right\}'\cos x\,dx \\ &= \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos x\,dx + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx \\ &= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin^n x\right]_0^{\pi} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx \\ &= \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^{n-2}x\,dx - \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^n x\,dx \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{n}I_{n-2} - (n-1)I_n\end{aligned}$$

となる。これを整理して，$n^2 I_n = (n-1)(n-2)I_{n-2}$ を得る。

(2)[別解] $n \geqq 1$ として，$x = \pi - t$ とおくと

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^n x\,dx = \frac{1}{n}\int_{\pi}^{0}(1+\pi-t)\sin^n t\,(-1)\,dt = \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(1+\pi-t)\sin^n t\,dt$$

となる。これより，

$$2I_n = \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^n x\,dx + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(1+\pi-x)\sin^n x\,dx = \frac{\pi+2}{n}\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx$$

を得る。従って，

$$I_n = \frac{\pi+2}{2n}\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx \quad (n \geqq 1)$$

である。これより, $n \geqq 3$ のとき,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{\pi+2}{2n}\int_0^\pi \sin^{n-1}x\,(-\cos x)'\,dx \\
&= \frac{\pi+2}{2n}\left\{\Big[\sin^{n-1}x\,(-\cos x)\Big]_0^\pi + (n-1)\int_0^\pi \sin^{n-2}x\,\cos^2 x\,dx\right\} \\
&= \frac{n-1}{2n}(\pi+2)\left\{\int_0^\pi \sin^{n-2}x\,dx - \int_0^\pi \sin^n x\,dx\right\} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{n}I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

となる。これを整理して, $n^2 I_n = (n-1)(n-2)I_{n-2}$ を得る。

(3)　$n \geqq 3$ として, (2) より $n^2 I_n = (n-1)(n-2)I_{n-2}$ である。この両辺に $(n-1)I_{n-1}$ をかけると

$$n^2(n-1)I_{n-1}I_n = (n-1)^2(n-2)I_{n-2}I_{n-1}$$

となる。

いま, $n \geqq 2$ に対して, $J_n = n^2(n-1)I_{n-1}I_n$ とおくと, $n \geqq 3$ に対して $J_n = J_{n-1}$ となる。これは, $n \geqq 2$ のとき, J_n が n によらず一定であることを示している。従って, (1) を使って, $n \geqq 2$ のとき,

$$J_n = J_2 = 2^2 \cdot 1 \cdot I_1 I_2 = \frac{\pi}{2}(\pi+2)^2$$

これより, $n \geqq 2$ のとき,

$$I_{n-1}I_n = \frac{\pi(\pi+2)^2}{2n^2(n-1)}$$

を得る。

理学部・工学部・都市デザイン学部

$\boxed{3}$ (1) $f(x)$ を微分して

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+3a^2)-(x+a)\cdot 2x}{(x^2+3a^2)^2}=-\frac{(x+3a)(x-a)}{(x^2+3a^2)^2}$$

を得る。これより, $f(x)$ の増減表は

x	……	$-3a$	……	a	……
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{6a}$	↗	$\frac{1}{2a}$	↘

となる。$f(x)$ の定義と増減表より,

$$\begin{aligned}&f(-3a)<f(x)<0 && (x<-3a)\\&f(-3a)<f(x)<f(a) && (-3a<x<a)\\&0<f(x)<f(a) && (a<x)\end{aligned}$$

を得る。これより, $f(x)$ の最大値は $\dfrac{1}{2a}$ で, それを与える x の値は a のみである。また, $f(x)$ の最小値は $-\dfrac{1}{6a}$ で, それを与える x の値は $-3a$ のみである

($x\geqq a$ で $f(x)$ は単調に減少して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ であり, $x\leqq -3a$ で $f(x)$ は単調に減少して $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ であることを考慮しても, 増減表より最大値と最小値の結果を得ることはできる)。

(2) $y=f(x)$, $z=f(y)=f(f(x))$ とおく。(1) より, y の取り得る値の範囲は

$$-\frac{1}{6a}\leqq y\leqq\frac{1}{2a}$$

である (実際は, 中間値の定理より, y は $-\frac{1}{6a}$ と $\frac{1}{2a}$ の間のすべての値を取る)。一方, $f(y)=0$ の解は $y=-a$ なので, $z=f(f(x))=0$ が実数解を持つのは

$$-\frac{1}{6a}\leqq -a\leqq\frac{1}{2a}$$

のときで, かつ, そのときに限る。このとき, 中間値の定理より $f(x_0)=-a$ となる実数 x_0 が存在する。上の不等式を解いて, $a>0$ を考慮すれば, 求める a の範囲は

$$a\leqq\frac{\sqrt{6}}{6}$$

となる。

(3) $y=f(x)$, $z=f(y)=f(f(x))$ とおくと求める最大値と最小値はそれぞれ, $-\dfrac{1}{6a}\leqq y\leqq\dfrac{1}{2a}$ における $f(y)$ の最大値と最小値である。

まず, $f(x)$ の定義より, $x\leqq -a$ で $f(x)\leqq 0$ であり, $x>-a$ で $f(x)>0$ である。(2) より $a\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ なので, これより $-\dfrac{1}{6a}\leqq -a$ かつ $a<\dfrac{1}{2a}$ となる。よって, $f\left(-\dfrac{1}{6a}\right)\leqq 0$ となり, (1) の増減表より $f(a)>f\left(\dfrac{1}{2a}\right)>0$ となる。

これらを用いて, $z=f(y)$ $\left(-\dfrac{1}{6a}\leqq y\leqq\dfrac{1}{2a}\right)$ の増減を調べる。

(i) $-\dfrac{1}{6a}<-3a$ (すなわち, $0<a<\dfrac{\sqrt{2}}{6}$) のとき, 次の増減表を得る。

y	$-\frac{1}{6a}$	$\cdots\cdots$	$-3a$	$\cdots\cdots$	a	$\cdots\cdots$	$\frac{1}{2a}$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(y)$	$f\left(-\frac{1}{6a}\right)$	$\searrow$	$f(-3a)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{2a}\right)$

このとき,

$$f(-3a) < f\left(-\frac{1}{6a}\right) \leqq 0 < f\left(\frac{1}{2a}\right) < f(a)$$

である (実は, このとき, $-\dfrac{1}{6a} < -3a < -a$ より $f\left(-\dfrac{1}{6a}\right) < 0$ である)。

(ii) $-\dfrac{1}{6a} \geqq -3a$ (すなわち, $\dfrac{\sqrt{2}}{6} \leqq a \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{6}$) のとき, 次の増減表を得る。

y	$-\frac{1}{6a}$	$\cdots\cdots$	a	$\cdots\cdots$	$\frac{1}{2a}$
$f'(y)$		$+$	0	$-$	
$f(y)$	$f\left(-\frac{1}{6a}\right)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{2a}\right)$

このとき,

$$f\left(-\frac{1}{6a}\right) \leqq 0 < f\left(\frac{1}{2a}\right) < f(a)$$

である。

以上より, $z = f(y) = f(f(x))$ の最大値は $0 < a \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ のとき $f(a) = \dfrac{1}{2a}$ であり,
$z = f(y) = f(f(x))$ の最小値は

$$0 < a < \frac{\sqrt{2}}{6} \text{ のとき } f(-3a) = -\frac{1}{6a}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{6} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ のとき } f\left(-\frac{1}{6a}\right) = \frac{6a(6a^2-1)}{1+108a^4}$$

である。

[注意] (3) で, $y = f(x_1) = a$ となる実数 x_1 が存在するのは中間値の定理による。また, $0 < a < \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ のとき $y = f(x_2) = -3a$ となる実数 x_2 が存在するのも中間値の定理による。